

5 Programación lineal entera y mixta

5.1 Introducción

En algunas situaciones que pueden representarse con modelos lineales, nos encontramos con que sólo tienen sentido aquellas soluciones de la región factible en las que todas o algunas de las variables de decisión sean números enteros. Estas situaciones pueden representarse mediante modelos matemáticos ligeramente diferentes de la programación lineal. Si todas las variables de decisión deben ser enteras, tenemos un problema de *programación lineal entera*. Si sólo algunas variables de decisión deben ser enteras, pudiendo ser reales las demás, se trata de un problema de *programación lineal mixta*.

En algunos casos, todas o algunas de las variables enteras sólo pueden tomar los valores de 0 o 1. A estas variables se les llama *variables binarias*. De este modo tenemos tres tipos de variables:

- a) Variables no enteras o reales
- b) Variables enteras
- c) Variables binarias

La posibilidad de utilizar variables enteras o binarias amplía notablemente las posibilidades de modelización matemática. El precio por una mayor versatilidad de la herramienta es el de una mayor complejidad en la resolución del modelo. Esta complejidad se debe a los siguientes hechos:

Para las variables enteras del modelo, el razonamiento que se empleó para mostrar que la solución óptima era un vértice (o una combinación convexa de vértices) de la región factible no es válido: en un caso general, los vértices de la región factible no tienen por qué ser números enteros. En consecuencia, la solución óptima se encontrará en el interior de la región factible, por lo que el método símplex, empleado de forma directa, no proporcionará la solución óptima.

A diferencia del problema con variables reales, el número de soluciones de un modelo de programación lineal entera es finito, por lo que podría plantearse la posibilidad de encontrar la solución mediante la exploración de todas las soluciones posibles. Sin embargo, el número de soluciones a explorar para un problema mediano puede ser muy elevado: en principio, para un problema con n variables enteras debemos explorar 2^n soluciones (excluyendo quizás algunas descartadas por las restricciones). Para $n = 30$, tenemos $2^{30} = 1.073.741.924$ soluciones posibles.

Se han desarrollado metodologías que permiten explorar de manera más eficiente que la mera enumeración el conjunto de soluciones posibles. Gran número de estas metodologías emplean la lógica del *branch and bound*, y están incorporadas a la mayoría de programas informáticos que resuelven modelos lineales. Seguidamente se muestra este procedimiento y cómo resolver modelos de programación entera mediante programas informáticos.

5.2 Metodología de resolución: algoritmo *branch and bound*

Un primer paso para la resolución de un modelo de programación lineal entera es resolver, mediante el método símplex, el problema lineal asociado. Se trata de un problema lineal con la misma función objetivo y restricciones que el modelo original, pero al que se han relajado la condición de que todas o algunas de las variables de decisión sean enteras. Si la solución así obtenida es entera, habremos encontrado la solución del modelo de programación lineal entera. En caso contrario (el más frecuente), la solución así obtenida es una primera aproximación a la solución del modelo.

Resulta tentador redondear los valores no enteros a enteros en la solución obtenida para el problema lineal asociado. Esto sólo se puede hacer si los valores de las variables son tan grandes que el redondeo no afecta excesivamente al resultado final, pero se debe tener cuidado al hacerlo pues se corren dos riesgos:

1. Es posible que la solución redondeada no sea factible.
2. Aún siendo factible, no existe ninguna de garantía que la solución sea óptima.

Estos dos problemas se ilustran en el ejemplo 2.a:

Ejemplo 2.a Encontrar la solución al modelo de programación entera:

$$\begin{aligned} [\text{MAX}] \quad & z = 10x + y \\ & x + 6y \leq 50 \\ & 12x + y \leq 60 \\ & x, y \geq 0, \text{ enteras} \end{aligned}$$

Podemos empezar por resolver el problema lineal asociado:

$$\begin{aligned} [\text{MAX}] \quad & z = 10x + y \\ & x + 6y \leq 50 \\ & 12x + y \leq 60 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

La solución de este problema es:

$$\begin{aligned} x^* &= 4,366 \\ y^* &= 7,605 \\ z^* &= 51,267 \end{aligned}$$

Claramente, ésta no es la solución del problema entero. Como al redondear uno de los dos resultados por exceso salimos de la región factible, es tentador dar como buena la solución:

$$\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 7 \\ z &= 47 \end{aligned}$$

Sin embargo, si exploramos el conjunto de posibles soluciones a partir de la representación gráfica, o bien introducimos el problema en un programa informático que resuelva modelos de programación entera, encontramos que la solución óptima es:

$$\begin{aligned} x^* &= 5 \\ y^* &= 0 \\ z^* &= 50 \end{aligned}$$

El valor de la función objetivo es algo inferior al del programa lineal asociado, dado que se encuentra dentro de la región factible, aunque no tan pequeña como la solución obtenida por redondeo.

El ejemplo 2.a nos muestra la necesidad de encontrar un procedimiento que nos permita, a partir del problema lineal asociado, ir explorando las soluciones enteras hasta encontrar el óptimo del modelo de programación entera. Este procedimiento es el algoritmo de *branch and bound*. Se trata de ir añadiendo restricciones al programa lineal asociado hasta encontrar la solución entera óptima. Para ello se procede en dos pasos: *ramificación (branch)* y *acotamiento (bound)*.

5.2.1 Ramificación

Se trata de añadir restricciones al modelo que fuercen a que una de las variables sea entera. Esto se consigue añadiendo una de estas dos restricciones para alguna de las variables x_{Bi} que no sea entera en la solución obtenida hasta el momento:

Redondeo por defecto: imponemos que la variable x_{Bi} sea inferior o igual a la parte entera del valor de esa variable en el óptimo del problema lineal x_{Bi} con las restricciones obtenidas hasta el momento. Esto equivale a añadir la restricción:

$$x_i \leq E(x_{Bi})$$

Redondeo por exceso: imponemos que la variable x_i sea mayor o igual al entero inmediatamente superior del valor x_{Bi} . Esto equivale a añadir la restricción:

$$x_i \geq E(x_{Bi}) + 1$$

Seguidamente, procederemos a resolver mediante el método símplex dos problemas lineales. El primero, además de las restricciones que pudiera tener de etapas anteriores, llevará incorporada la restricción de redondeo por defecto incorporada en esta etapa. El segundo se diferenciará del primero en que incluirá la restricción de redondeo por exceso, en vez de la de redondeo por defecto.

5.2.2 Acotamiento

Para mostrar el razonamiento de la etapa de acotamiento, utilizaremos un problema de máximo. El lector puede realizar, si lo desea, el mismo razonamiento para el problema de mínimo.

Más arriba se mostró que la solución óptima del modelo de programación lineal entera se encuentra dentro de la región factible. Esto significa que, para un problema de máximo, el óptimo del programa entero será menor o igual que el óptimo del problema lineal asociado. Al hacer la ramificación, hemos encontrado dos alternativas posibles para obtener la solución entera. Los valores óptimos de la función objetivo z^* de cada uno de los programas lineales resueltos en la etapa anterior serán una *cota superior* de las posibles soluciones que obtengamos mediante posteriores ramificaciones a partir de ese modelo. En consecuencia, sólo tendrá sentido continuar con el procedimiento de ramificación a partir del problema lineal que tenga la mayor z^* de los dos. Siguiendo la otra ramificación, obtendremos soluciones enteras con valores de z^* inferiores, con toda seguridad, a los que obtendríamos con la otra ramificación, y por tanto subóptimos.

Este hecho nos marca, además, cuándo debemos detenernos en la exploración de soluciones enteras: cuando el problema escogido tenga una solución con todas las variables enteras. Por ser el valor de la función objetivo una cota superior del óptimo, cualquier otra solución entera que pudiéramos explorar sería subóptima, y por lo tanto no vale la pena seguir explorando.

¿Cuál será la solución óptima del modelo de programación entera? No necesariamente la obtenida en la última etapa, sino la solución entera con mayor valor de función objetivo de las obtenidas en el proceso.

Puede suceder que alguna de las ramificaciones abandonadas condujera a una solución entera que en aquel momento tuviera un valor de z^* inferior al de la otra ramificación, pero mayor que la z^* obtenida al final.

Seguidamente se expone el algoritmo descompuesto en pasos. El ejemplo 2.b muestra el funcionamiento del algoritmo para un caso concreto.

Paso 0	Resolver el problema lineal asociado al problema entero: misma función objetivo y restricciones, pero variables no enteras.
Paso 1	Si la solución obtenida es entera: <i>finalizar</i> . El óptimo será aquella solución entera con mejor valor de la función objetivo. Si no, <i>ir a paso 2</i> .
Paso 2	Escoger una variable básica cuyo valor en la solución x_{Bi} no sea entero.
Paso 3	<i>Ramificación</i> : resolver dos nuevos problemas lineales. Al primero se le añade la restricción: $x_i \leq E(x_{Bi})$ (redondeo por defecto). Al segundo añadiremos la restricción: $x_i \geq E(x_{Bi}) + 1$ (redondeo por exceso).
Paso 4	<i>Acotación</i> : de los dos problemas, escoger aquel que dé como resultado un valor mejor de la función objetivo.
Paso 5	<i>Ir a paso 1</i> .

Ejemplo 2.b Problema de la granja en variables enteras (A)

Nuestro granjero decide ahora subdividir su terreno en 6 campos de la misma área, de modo que en cada campo sólo podrá plantar un tipo de cultivo, ya sea cebada o lechugas. El granjero ha calculado que según el precio mínimo garantizado por el Gobierno Europeo y después de restar todos los costes, obtendrá un beneficio neto de 1000 euros por campo de cebada y 1600 euros por campo de lechugas. La recogida de un campo de cebada necesita 80 horas de mano de obra y la de un campo de lechugas 160 horas. Durante la cosecha el granjero dispondrá de 700 horas disponibles de mano de obra. Existe además la restricción de que no podrá plantar más de 3 campos de cebada.

¿Cuántos campos de lechugas y cuántos campos de cebada debe cultivar el agricultor para maximizar su beneficio?

El problema del agricultor puede resolverse con el siguiente modelo de programación lineal entera:

Variables de decisión:

CEB: campos en que cultivará cebada el agricultor. Debe ser una variable entera.

LEC: campos en que el agricultor cultivará lechugas. Debe ser también una variable entera.

Función objetivo:

$$[\text{MAX}] z = 1000\text{CEB} + 1600\text{LEC}$$

Restricciones:

$$\begin{array}{rcl} \text{CEB} & & \leq 3 \\ 80\text{CEB} + & 160\text{LEC} & \leq 700 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{CEB} + & \text{LEC} & \leq 6 \\ \text{CEB} \geq 0 & & \\ & \text{LEC} & \geq 0 \end{array}$$

En la figura 5.2.b se muestra la resolución de este modelo de programación entera, mediante el algoritmo de ramificación y acotamiento. Nótese como la solución entera no puede obtenerse por redondeo de la solución del modelo con variables reales. Es destacable también que el valor del óptimo del modelo con variables enteras es peor que el del modelo con variables reales.

Para este modelo, podemos interpretar que el hecho de sembrar un campo con un solo cultivo es una opción menos flexible que cultivar diferentes productos en un mismo campo, y en consecuencia la solución es peor.

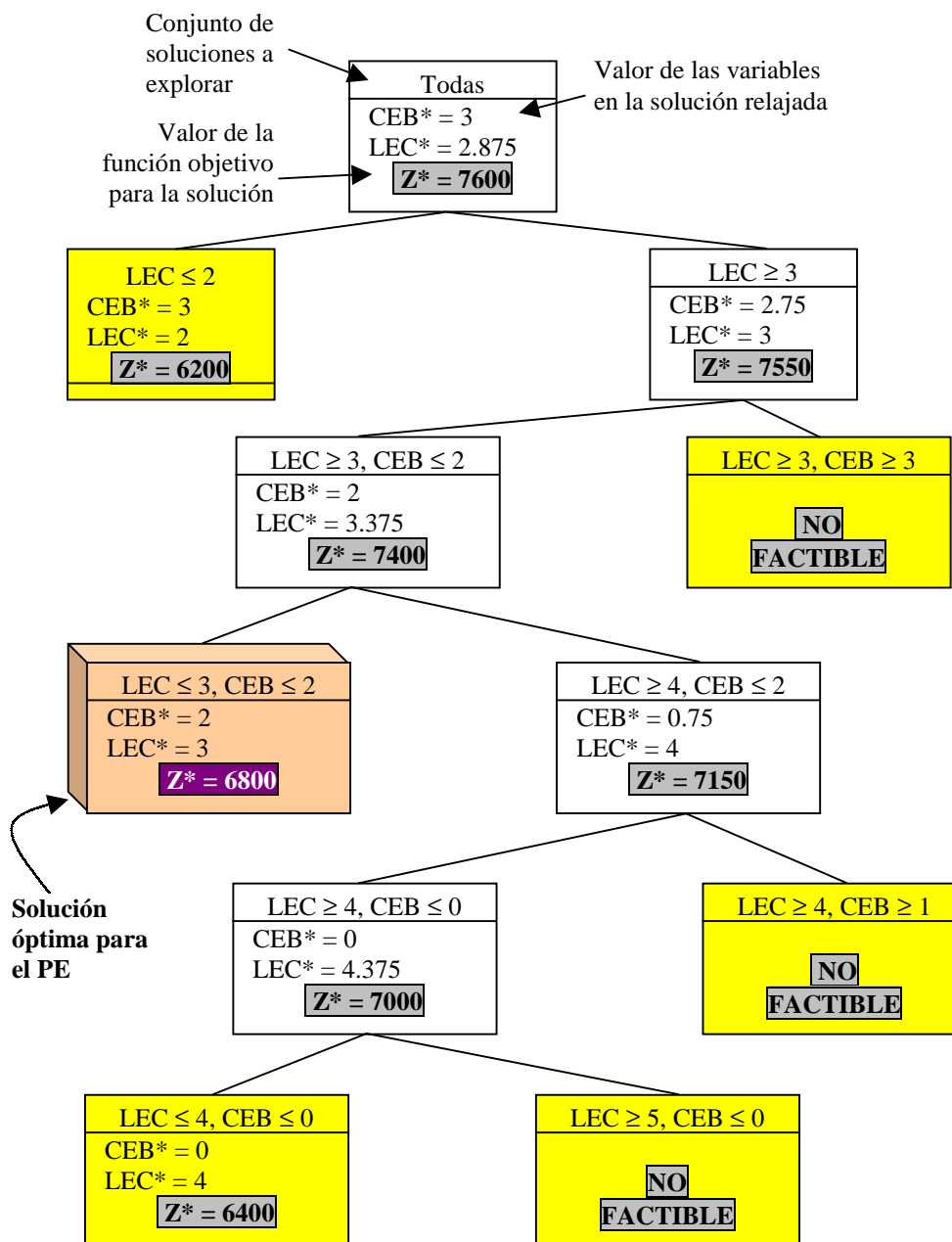


Figura 5.2.a Branch and bound para el ejemplo 2.b

5.3 Resolución de programación entera mediante programas informáticos

Gran parte de los paquetes informáticos que resuelven programación lineal resuelven también programación entera, usando variantes más o menos sofisticadas del algoritmo de bifurcación y acotamiento expuesto en 5.2. Hay que decir que la introducción de variables enteras aumenta considerablemente el número de cálculos a realizar, por lo que nos podemos encontrar con limitaciones al número de variables enteras que podemos introducir en el modelo. En el caso del programa LINDO, se utilizan dos instrucciones:

INTEGER <nombre de la variable>

Mediante la instrucción INTEGER, se indica al programa que la variable designada es binaria, esto es, que sólo puede tomar los valores 0 o 1.

GIN <nombre de la variable>

Mediante la instrucción GIN, se indica al programa que la variable designada es entera positiva.

Ambas instrucciones deben insertarse después de la instrucción END, que indica al programa el fin del modelo lineal considerado.

Ejemplo 3.a Resolver mediante el programa LINDO el modelo de programación entera del ejemplo 2.b

Teniendo en cuenta que tanto CEB como LEC deben ser variables enteras, debe introducirse el modelo en LINDO del modo siguiente:

```
MAX 1000CEB + 1600LEC
ST
CEB < 3
80CEB + 160LEC < 700
CEB + LEC < 6
END
GIN CEB
GIN LEC
```

La solución que suministra LINDO es:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
OBJECTIVE VALUE =    7600.00000
```

```
NEW INTEGER SOLUTION OF    6800.00000    AT BRANCH      0 PIVOT      5
BOUND ON OPTIMUM:    6800.000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=      5
```

```
LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 6800.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
----------	-------	--------------

```

CEB          2.000000      -1000.000000
LEC          3.000000      -1600.000000
    
```

```

ROW  SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
  2)          1.000000          0.000000
  3)         60.000000          0.000000
  4)          1.000000          0.000000
    
```

```

NO. ITERATIONS=          5
BRANCHES=          0 DETERM.=  1.000E  0
    
```

El programa resuelve en primer lugar el problema lineal asociado, que será la primera cota superior de la función objetivo. A continuación, inicia el procedimiento de ramificación y acotamiento, obteniendo finalmente la solución óptima.

5.4 Programación lineal con variables binarias

El uso de variables binarias permite introducir planteamientos decisionales en programación entera y permite representar gran número de situaciones. Sin ánimo de ser exhaustivos, detallaremos en seguida algunas de ellas.

El ejemplo 4.a es un caso de programación lineal en el que todas las variables son binarias. Frecuentemente se denomina a este tipo de modelos como de programación lineal binaria.

Ejemplo 4.a California Manufacturing Company (A)

La empresa CMC está analizando la posibilidad de expansión mediante la construcción de una nueva fábrica, ya sea en L.A. o en San Francisco o en ambas ciudades. También está pensando en construir un nuevo almacén a lo sumo, pero la decisión dependerá del emplazamiento de la nueva fábrica. El beneficio total aportado por la inversión referido al momento presente se lista en la tercera columna y el coste de la inversión referido al momento presente se lista en la cuarta. El total del capital disponible es de \$10· 10⁶. Se pide encontrar la solución factible que maximice el valor del beneficio total.

Decisión	Pregunta Sí o No	Beneficio Total	Coste inversión
1	¿Construir la fábrica en L.A.?	9M.\$	6M.\$
2	¿Construir la fábrica en San Francisco?	5M.\$	3M.\$
3	¿Construir el almacén en L.A.?	6M.\$	5M.\$
4	¿Construir el almacén en San Francisco?	4M.\$	2M.\$
		Capital máx	10M.\$

Esta situación puede representarse mediante el siguiente modelo de programación entera:

Variables de decisión:

x_1, x_2, x_3, x_4 binarias (0 o 1) según la decisión correspondiente sea afirmativa ($x_i = 1$) o negativa ($x_i = 0$).

Función objetivo:

$$[\text{MAX}] z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

El beneficio total será la suma de los beneficios obtenidos en aquellas alternativas que escoja el modelo, en las que $x_i = 1$

Restricciones:

Limitación de capital $\rightarrow 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$

(Se plantea del mismo modo que la función objetivo: la inversión en las alternativas escogidas debe ser inferior al capital total disponible. Tenemos una primera limitación para el número de variables binarias que pueden ser uno.)

Alternativas excluyentes (almacén) $\rightarrow x_3 + x_4 \leq 1$

(Con esta restricción, hacemos imposible que el modelo nos indique que deben construirse dos almacenes. Si esto fuera posible, $x_3 = 1$ y $x_4 = 1$, con lo que $x_3 + x_4 = 2$, situación que excluimos con esta restricción.)

Decisiones contingentes (almacén \Rightarrow fábrica):

$$x_3 \leq x_1 \quad y \quad x_4 \leq x_2 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} -x_1 \\ +x_3 \\ -x_2 \\ +x_4 \end{array} \leq 0$$

Seguidamente indicamos otras situaciones representables mediante variables binarias, aportando ejemplos para algunas de ellas.

5.4.1 Alternativas mutuamente excluyentes

Muchos grupos de decisiones pueden ser del tipo *sí o no* y además requerir que *sólo una* de las decisiones del grupo puede ser *sí*. En este caso las alternativas son mutuamente excluyentes y cada grupo requiere una restricción que obligue a la suma de las variables binarias a ser igual a 1 (si exactamente una decisión debe ser *sí*), o menor o igual a 1 (si como máximo una decisión de ese grupo puede ser *sí*).

Ejemplo 4.b California Manufacturing (B)

¿Cómo debe modificarse el modelo de la situación descrita en el ejemplo 3.a si le añadimos la restricción adicional de construir sólo un almacén?

Deberemos añadir al modelo original la restricción:

Alternativas excluyentes (almacén) $\rightarrow x_3 + x_4 \leq 1$

5.4.2 Decisiones contingentes

Una situación contingente ocurre cuando una acción que sigue a otra se vuelve irrelevante, y a veces imposible dependiendo de la acción inicial, lo que implica que la decisión contingente depende de decisiones previas, por ejemplo una decisión es contingente sobre otra si permite que sea *SÍ* sólo si la otra es *SÍ*.

Ejemplo 4.c California Manufacturing (C)

¿Cómo debe modificarse el modelo de la situación descrita en el ejemplo 3.a si ahora queremos que el almacén se construya en la misma localización en que se construya la fábrica?

Ahora deben añadirse al modelo del ejemplo 3.a las restricciones:

$$x_3 \leq x_1 \quad y \quad x_4 \leq x_2 \quad \rightarrow \quad -x_1 \quad + x_3 \quad \leq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -x_2 \quad + x_4 \leq 0$$

5.4.3 Restricciones de una u otra

Se puede considerar el caso en el que se debe elegir entre dos restricciones, de manera que sólo una de las dos (cualquiera de ellas) se tenga que cumplir (la otra puede cumplirse pero no se requiere que lo haga).

Ejemplo 4.d Problema de la granja con alternativas

En el problema de la granja del tema 2, planteábamos la cuestión de cuántas hectáreas de cebada y cuántas hectáreas de lechuga debía plantar un agricultor en sus 110 hectáreas de terreno, sabiendo que una hectárea del primer cultivo le daba un beneficio de 50 unidades monetarias y una hectárea del segundo 80 unidades monetarias. Además, debía considerar el hecho de que disponía únicamente de 720 horas de trabajo y que cultivar una hectárea de terreno con cebada suponía 4 horas de trabajo y cultivar una hectárea de lechuga suponía 8 horas de trabajo. En el problema original, el agricultor podía sembrar un máximo de 80 hectáreas de cebada. Ahora se le plantea la posibilidad de sustituir esta limitación por otra consistente en limitar a 90 hectáreas la cantidad de tierra que puede cultivarse con lechugas. ¿Cómo puede modelizarse esta situación con un solo modelo?

Recordemos que el modelo de la granja original era el que se presenta a continuación. La limitación al cultivo de cebada viene representada por la primera restricción:

$$\begin{aligned} [\text{MAX}]z &= 50\text{CEB} + 80\text{LEC} \\ \text{CEB} &\leq 80 \\ \text{CEB} + \text{LEC} &\leq 110 \\ 4\text{CEB} + 8\text{LEC} &\leq 720 \\ \text{CEB}, \text{LEC} &\geq 0 \end{aligned}$$

Ahora planteamos la posibilidad de que también sea posible el modelo siguiente, que difiere del anterior en una sola restricción:

$$\begin{aligned} [\text{MAX}]z &= 50\text{CEB} + 80\text{LEC} \\ \text{LEC} &\leq 90 \\ \text{CEB} + \text{LEC} &\leq 110 \\ 4\text{CEB} + 8\text{LEC} &\leq 720 \\ \text{CEB}, \text{LEC} &\geq 0 \end{aligned}$$

La situación que deseamos introducir en el modelo es que sólo pueda activa una de estas dos restricciones:

$$\begin{aligned} \text{CEB} &\leq 80 \\ \text{LEC} &\leq 90 \end{aligned}$$

Es decir, al menos una de las dos desigualdades se debe cumplir, pero no necesariamente las dos simultáneamente.

Una posible solución a este problema sería resolver dos modelos lineales, uno con una restricción y otro con otra, y tomar como solución aquel modelo de los dos que tuviera un mejor valor de la función

objetivo. Para modelos grandes, y en los que tengamos más de un conjunto de restricciones alternativas de este tipo, el coste de este procedimiento puede ser mayor que el derivado de usar una variable binaria.

También podemos intentar incorporar las dos restricciones al modelo, pero de manera que sólo una de las dos restricciones pueda ser activa. Sabemos que si el término independiente de una restricción de menor o igual es muy grande, la restricción no es activa. Por lo tanto, si tenemos:

$$\begin{aligned} \text{CEB} &\leq 80 \\ \text{LEC} &\leq 90 + M \end{aligned}$$

La restricción de cantidad máxima de lechugas no es activa: simplemente estamos diciendo que dicha cantidad de lechugas sea inferior a una cantidad muy grande. Si tenemos:

$$\begin{aligned} \text{CEB} &\leq 80 + M \\ \text{LEC} &\leq 90 \end{aligned}$$

... entonces la restricción de cantidad máxima de cebada no será activa, por la misma razón que en el caso anterior.

Al agregar M , el efecto que obtenemos es desactivar una de las restricciones: la restricción afectada de M no será activa, puesto que no dice otra cosa que la cantidad de cebada o de lechugas, respectivamente, debe ser más pequeña que un número muy grande. Lo que se espera es que se cumpla siempre con holgura, de modo que no influya en la determinación del óptimo.

Para decidir entre el primer grupo o el segundo grupo de restricciones añadiremos la variable de decisión binaria y de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{CEB} &\leq 80 + M \cdot y \\ \text{LEC} &\leq 90 + M \cdot (1-y) \end{aligned}$$

Así, cuando $y = 1$, la cantidad de cebada no estará limitada, y la de lechuga estará limitada a 90. Cuando $y = 0$, sucederá lo contrario: la cantidad de lechugas no estará limitada y la de cebada estará limitada a 80.

Nótese que el modelo obtenido es de programación lineal mixta (CEB y LEC son variables reales, mientras que la variable y es binaria). Se ha evitado multiplicar variables (error muy frecuente en este tipo de modelizaciones).

Para introducir este modelo en LINDO haremos:

```
MAX 50CEB + 80LEC
ST
CEB + LEC < 110
4CEB + 8LEC < 720
CEB - 1000BIN < 80
LEC + 1000BIN < 1090
END
INTEGER BIN
```

La solución suministrada por el programa es:

```
OBJECTIVE VALUE = 7600.00000
FIX ALL VARS.( 1) WITH RC > 0.000000E+00
```

NEW INTEGER SOLUTION OF 7600.00000 AT BRANCH 0 PIVOT 2
 BOUND ON OPTIMUM: 7600.000
 ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES= 0 PIVOTS= 2

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
 RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 7600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
BIN	0.000000	0.000000
CEB	40.000000	0.000000
LEC	70.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	20.000000
3)	0.000000	7.500000
4)	40.000000	0.000000
5)	1020.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2
 BRANCHES= 0 DETERM.= 1.000E 0

En este caso, encontramos que el mejor resultado se obtiene limitando a 80 la superficie de cebollas a cultivar, en vez de limitar a 90 la cantidad de lechugas.

5.4.4 Deben cumplirse K de N restricciones

El modelo completo incluye un conjunto de N restricciones posibles de las que sólo K de ellas se deben cumplir (K < N). Las N - K restricciones que no se eligen quedan eliminadas del problema, aun cuando por coincidencia la solución pueda satisfacer algunas de ellas. Este caso es una generalización de la situación del ejemplo 3.c, en la que N=2 y K=1.

Denotaremos las posibles restricciones por:

$$\begin{aligned}
 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_1 \\
 g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_2 \\
 &\dots/\dots \\
 g_N(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_N
 \end{aligned}$$

La formulación del programa es:

$$\begin{aligned}
 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_1 + My_1 \\
 g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_2 + My_2 \\
 &\dots/\dots \\
 g_N(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_N + My_N \\
 y_1 + y_2 + \dots + y_N &= N - K
 \end{aligned}$$

siendo y_i binaria para $i = 1, 2, \dots, N$

5.4.5 Funciones con N valores posibles

Consideremos la situación en la que se requiere que una función dada tome cualquiera de N valores dados:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 \text{ ó } d_2 \text{ ó } \dots \text{ ó } d_N$$

La formulación entera para este requerimiento es la siguiente:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 \cdot y_1 + d_2 \cdot y_2 + \dots + d_N \cdot y_N$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_N = 1$$

siendo y_i binaria para $i = 1, 2, \dots, N$

5.4.6 Problema del coste fijo

El coste fijo aparece cuando se emprende alguna actividad y sobre él no influye el grado de actividad que se realice. Por otro lado, el coste variable suele estar muy cerca de ser proporcional al nivel de actividad. Por estos motivos la función de costes totales (fijo + variable) para una acción genérica j resulta:

$$\begin{aligned} c_j(x_j) &= K_j + c_j \cdot x_j && \text{si } x_j > 0 \\ c_j(x_j) &= 0 && \text{si } x_j = 0 \end{aligned}$$

Para representar esta situación, deberemos añadir j restricciones contingentes que indicarán si se desarrolla la actividad x_j o no:

$$x_j \leq M \cdot y_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

La formulación del programa lineal de coste fijo es:

$$[\text{MIN}] z = (K_1 \cdot y_1 + c_1 \cdot x_1) + (K_2 \cdot y_2 + c_2 \cdot x_2) + \dots + (K_n \cdot y_n + c_n \cdot x_n)$$

sujeta a las restricciones originales, más

$$x_j - M \cdot y_j \leq 0 \quad y_j \text{ binaria para } j = 1, 2, \dots, n$$

En los ejemplos siguientes mostramos la resolución de algunos modelos de programación entera. Aunque el programa suele proporcionarnos análisis de sensibilidad, debemos ser cuidadosos con la interpretación de los resultados, puesto que dicho análisis es para el modelo lineal original, relajado en la condición de variables enteras, al que se le habrá añadido el conjunto de restricciones propio del algoritmo de bifurcación y acotamiento.

5.5 Problemas resueltos

En esta sección se mostrará un ejemplo de una modelización de cierta complejidad empleando variables binarias. Pueden encontrarse gran número de ejemplos de modelización con variables enteras y binarias en el tema 6, dedicado a modelización avanzada.

5.5.1 Plan de producción de dos productos y tres fábricas

Determinada empresa sirve dos productos (P1 y P2) que fabrica en tres plantas diferentes (que llamaremos F1, F2 y F3). La capacidad de las fábricas, medida en horas es de 1.000, 2.000 y 1.500 horas

respectivamente. El coste de producción de los productos es de 2 unidades monetarias (um) por hora en cualquiera de las tres fábricas.

Fabricar un kilo de P1 ocupa 4 horas de tiempo de fábrica, y un kilo de P2 3 horas. Si decidimos producir un producto en una fábrica determinada, incurrimos en un coste fijo que es de 600 um para P1 y de 700 um para P2.

Los precios de venta de P1 y P2 son de 11 um/Kg y de 8 um/Kg respectivamente. La demanda máxima de P1 es de 800 Kg, y la de P2 de 1000 Kg. Las demandas mínimas a satisfacer de P1 y P2 son de 80 y 100 Kg, respectivamente.

Por razones de seguridad, cada producto debe fabricarse al menos en dos fábricas. Si se decide fabricar un producto en una fábrica, la cantidad mínima a fabricar será de 50 Kg.

Determinar el plan de producción (cuánto debe fabricarse de P1 y P2 en F1, F2 y F3) que maximiza el beneficio.

Solución

Las variables de decisión serán de dos tipos. Las primeras son de la forma:

XXYY

representando la cantidad del producto (XX = P1 o P2) que se fabricará en una determinada fábrica (YY = F1, F2 o F3). Al permitirse la fabricación de cantidades discretas, dichas variables serán reales.

El segundo conjunto de variables tendrá la forma:

BXXYY

representando la decisión de fabricar el producto XX en la fábrica YY. Se trata de variables binarias, que valdrán 1 si efectivamente se fabrican el producto en la fábrica, y 0 en caso contrario.

Una vez definidas las variables, pasamos a definir el modelo. Para ello, hemos de tener en cuenta que el beneficio unitario de una unidad de P1 vale $11 - 4 \cdot 2 = 3$. El beneficio unitario de una unidad de P2 es $8 - 3 \cdot 2 = 2$. Ello se debe a que los únicos costes variables son los asociados a las horas de utilización de la fábrica. A estos costes hemos de añadir los costes fijos asociados a fabricar un producto en una fábrica. Para ello utilizaremos las variables binarias. La función objetivo será:

$$\text{MAX } 3P1F1 + 3P1F2 + 3P1F3 + 2P2F1 + 2P2F2 + 2P2F3 - 600BP1F1 - 60BP1F2 - 600BP1F3 - 700BP2F1 - 700BP2F2 - 700BP2F3$$

Teniendo en cuenta que producir una unidad de P1 consume 4 horas de fábrica y producir una de P2 3 horas, tendremos tres restricciones asociadas a la capacidad productiva:

$$4P1F1 + 3P2F1 < 1000$$

$$4P1F2 + 3P2F2 < 2000$$

$$4P1F3 + 3P2F3 < 1500$$

También tendremos restricciones asociadas a la demanda total de P1 y P2. Estas restricciones se refieren a la demanda total, independientemente de donde se haya fabricado. Así, tendremos dos restricciones para la demanda máxima y dos para la demanda mínima:

$$\begin{aligned} P1F1 + P1F2 + P1F3 &< 800 \\ P2F1 + P2F2 + P2F3 &< 1000 \\ P1F1 + P1F2 + P1F3 &> 80 \\ P2F1 + P2F2 + P2F3 &> 100 \end{aligned}$$

Ahora debemos introducir las restricciones asociadas a la fabricación de un producto en una fábrica determinada. Éstas tendrán la forma:

$$XXYY \leq M \cdot BXXYY$$

M representa un número grande, de manera que la restricción sea inactiva cuando $BXXYY = 1$. Se ha escogido hacer $M = 2000$, por ser ésta una cantidad superior a cualquiera de los valores máximos de $XXYY$, determinados por las restricciones anteriores. Dado que en LINDO hemos de introducir todas las variables en el lado derecho de la restricción, éstas tendrán la forma siguiente:

$$\begin{aligned} P1F1 - 2000BP1F1 &< 0 \\ P1F2 - 2000BP1F2 &< 0 \\ P1F3 - 2000BP1F3 &< 0 \\ P2F1 - 2000BP2F1 &< 0 \\ P2F2 - 2000BP2F2 &< 0 \\ P2F3 - 2000BP2F3 &< 0 \end{aligned}$$

Además, si decidimos fabricar un producto en una fábrica, la cantidad ha de ser al menos de 50. Este hecho lo representamos mediante las restricciones:

$$XXYY \geq 50 \cdot BXXYY$$

Cuando $BXXYY = 1$, la restricción será activa. Cuando $BXXYY = 0$, la restricción indicará que $XXYY \geq 0$, es decir, que la variable sea no negativa. Como las restricciones anteriores hacían $XXYY \leq 0$ cuando $BXXYY = 0$, $XXYY = 0$ cuando $BXXYY = 0$. Este conjunto de restricciones tomará la forma:

$$\begin{aligned} P1F1 - 50BP1F1 &> 0 \\ P1F2 - 50BP1F2 &> 0 \\ P1F3 - 50BP1F3 &> 0 \\ P2F1 - 50BP2F1 &> 0 \\ P2F2 - 50BP2F2 &> 0 \\ P2F3 - 50BP2F3 &> 0 \end{aligned}$$

Las últimas restricciones son las relativas a que cada producto se haga al menos en dos fábricas. Tendrán la forma:

$$\begin{aligned} BP1F1 + BP1F2 + BP1F3 &> 2 \\ BP2F1 + BP2F2 + BP2F3 &> 2 \\ \text{END} \end{aligned}$$

Una vez introducido el modelo, hemos de indicar que las variables $BXXYY$ son binarias:

$$\begin{aligned} \text{INT } BP1F1 \\ \text{INT } BP1F2 \\ \text{INT } BP1F3 \\ \text{INT } BP2F1 \\ \text{INT } BP2F2 \\ \text{INT } BP2F3 \end{aligned}$$

La solución obtenida por LINDO es:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 23
 OBJECTIVE VALUE = 1206.66663

FIX ALL VARS.(2) WITH RC > 0.000000E+00

NEW INTEGER SOLUTION OF 1206.66663 AT BRANCH 0 PIVOT 36
 BOUND ON OPTIMUM: 1206.667
 ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES= 0 PIVOTS= 36

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
 RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 1206.667

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
BP1F1	0.000000	600.000000
BP1F2	1.000000	60.000000
BP1F3	1.000000	600.000000
BP2F1	1.000000	700.000000
BP2F2	0.000000	700.000000
BP2F3	1.000000	700.000000
P1F1	0.000000	0.000000
P1F2	500.000000	0.000000
P1F3	300.000000	0.000000
P2F1	333.333344	0.000000
P2F2	0.000000	0.000000
P2F3	100.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.666667
3)	0.000000	0.666667
4)	0.000000	0.666667
5)	0.000000	0.333333
6)	566.666687	0.000000
7)	720.000000	0.000000
8)	333.333344	0.000000
9)	0.000000	0.000000
10)	1500.000000	0.000000
11)	1700.000000	0.000000
12)	1666.666626	0.000000
13)	0.000000	0.000000
14)	1900.000000	0.000000
15)	0.000000	0.000000
16)	450.000000	0.000000
17)	250.000000	0.000000
18)	283.333344	0.000000
19)	0.000000	0.000000
20)	50.000000	0.000000
21)	0.000000	0.000000
22)	0.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 42
 BRANCHES= 0 DETERM.= 1.000E 0

De la solución vemos que:

P1 se fabrica en F2 (500 Kg) y en F3 (300 Kg), y se produce la cantidad máxima. P2 se fabrica en F1 (333,3 Kg) y en F3 (100 Kg), y se produce una cantidad intermedia entre la demanda máxima y mínima. De esta manera las tres fábricas funcionan a máxima capacidad, respetando las restricciones de seguridad y minimizando los costes fijos. El beneficio obtenido con este programa óptimo es de 1.206,67 um. El programa indica que se han realizado 42 ramificaciones para obtener la solución óptima, y que en este caso la solución del modelo coincide con la del problema lineal asociado.

5.6 Problemas propuestos

El lector puede encontrar en el tema 6 gran número de ejemplos de modelos de programación lineal entera y mixta. En esta sección, incluimos dos ejemplos de ramificación y acotamiento que tienen como objeto completar la comprensión del procedimiento. La solución del primer ejercicio se encuentra en la sección 1.

Para resolver los ejercicios, es recomendable utilizar un programa informático para obtener de manera rápida las soluciones a los diferentes problemas. Puede ser también muy ilustrativo realizar la representación gráfica e ir añadiendo las diferentes restricciones, para observar cómo se produce la partición de la región factible.

Ejercicio 6.1

Resolver mediante el procedimiento de ramificación y acotamiento el modelo del ejemplo 2.a:

$$\begin{aligned} [\text{MAX}] \quad & z = 10x + y \\ & x + 6y \leq 50 \\ & 12x + y \leq 60 \\ & x, y \geq 0, \text{ enteras} \end{aligned}$$

(Solución: $x^* = 5$, $y^* = 0$, $z^* = 50$)

Ejercicio 6.2

Resolver mediante el procedimiento de ramificación y acotamiento el modelo:

$$\begin{aligned} [\text{MIN}] \quad & z = 3x + 4y \\ & x + 3y \geq 40 \\ & x - y \geq 5 \\ & 2x \leq 31 \\ & x, y \geq 0, \text{ enteras} \end{aligned}$$

(Solución: $x^* = 14$, $y^* = 9$, $z^* = 78$)

5.7 Glosario

Acotamiento

(Ver RAMIFICACIÓN). Segunda etapa del procedimiento de ramificación y acotamiento en la que escogemos cuál de los dos subconjuntos del conjunto de soluciones posibles obtenidos en la ramifica-

ción exploraremos en la etapa siguiente. En el caso de la programación lineal entera, se escoge aquel programa lineal con mejor valor del óptimo de la función objetivo (ver sección 2). Dicho valor será una cota superior (inferior) de la solución del modelo de programación lineal entera de máximo (mínimo).

Branch and bound

Ver RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO.

Programa (lineal) asociado

Dado un modelo de programación entera o mixta, su programa lineal asociado es aquel que tiene la misma función objetivo y restricciones, siendo reales todas sus variables de decisión. La solución del programa lineal asociado, que puede obtenerse en cualquier caso con el método símplex, sirve de punto de partida para obtener, mediante un procedimiento de ramificación y acotamiento, la solución del modelo de programación entera.

Programación (lineal) binaria

Modelo de programación matemática cuya función objetivo y restricciones cumplen las condiciones de los modelos de programación lineal, pero al que se ha impuesto la condición adicional de que las variables de decisión sean *todas* binarias. Es un caso particular de programación entera.

Programación (lineal) entera

Modelo de programación matemática cuya función objetivo y restricciones cumplen las condiciones de los modelos de programación lineal, pero al que se ha impuesto la condición adicional de que las variables de decisión sean *todas* enteras.

Programación (lineal) mixta

Modelo de programación matemática cuya función objetivo y restricciones cumplen las condiciones de los modelos de programación lineal, pero al que se ha impuesto la condición adicional de que *algunas* de las variables de decisión sean enteras.

Ramificación

Primera etapa del procedimiento de ramificación y acotamiento mediante el cual dividimos en dos partes el conjunto de las soluciones. En el caso de la programación entera, dicha ramificación se obtiene creando dos nuevos problemas lineales a partir del considerado en la etapa anterior, añadiendo a cada uno de ellos una nueva restricción, diferente para cada uno (ver sección 2).

Ramificación y acotamiento

Procedimiento de optimización combinatoria para obtener la solución de un modelo de programación lineal entera o mixta, a partir del programa lineal asociado. Consiste en la definición de un procedimiento de ramificación y de acotamiento.

Variable binaria

Variable de decisión de un modelo de programación lineal entera o mixta a la que se le impone la condición de tomar únicamente los valores 0 o 1.

Variable entera

Variable de decisión de un modelo de programación lineal entera o mixta a la que se le impone la condición de pertenecer al conjunto de números enteros no negativos.

6 Modelización avanzada en programación lineal

6.1 Modelización avanzada en programación lineal

Este tema es, en su concepción y conocimientos que transmite, radicalmente diferente de los anteriores. En los temas 2, 4 y 5 se mostraban las posibilidades de las técnicas de métodos cuantitativos próximas a la programación lineal, y en el tema 4 se indicaba cómo podían explotarse e interpretarse los resultados obtenidos de la resolución de los modelos mediante programación lineal. En éste se muestra cómo podemos representar situaciones complejas, propias de las empresas y las organizaciones mediante modelos de programación lineal, y sobre todo de programación entera y mixta.

Los otros temas se prestaban a una exposición sistemática de los contenidos y al posterior afianzamiento del conocimiento de dichos contenidos por parte del alumno mediante la resolución de ejercicios. En éste, sin embargo, no hay otra solución que mostrar directamente los ejercicios. En el apartado 6.2 el lector encontrará siete ejercicios resueltos, que cubren gran parte de los problemas más usuales de la modelización avanzada mediante programación lineal.

Tal como se ha indicado anteriormente, resulta difícil dar una sistemática para modelizar situaciones concretas. En ocasiones, resulta difícil incluso dar una solución, puesto que es posible representar una misma situación con modelos muy diferentes. En cualquier caso, suelen ser válidas las siguientes recomendaciones:

6.1.1 Selección y definición de las variables de decisión

Es muy importante escoger correctamente las variables y definir las con precisión. Las variables a escoger han de ser tales que permitan expresar la solución de forma directa, o bien, mediante manipulaciones sencillas. También es importante indicar si la variable es entera, binaria o real. En algunos problemas de cierta regularidad, puede ser útil definir variables con subíndices o con un determinado patrón regular: así, en un modelo de planificación de la producción podemos definir variables como:

$$XYYY$$

Donde X puede ser A, B o C, dependiendo del tipo de producto. YYY puede ser una variable representativa del mes en que se produce: ENE, FEB, ..., DIC. De esta manera, hemos definido 36 variables de forma rápida y comprensible.

6.1.2 Función objetivo y restricciones

Una vez definidas las variables, deben expresarse las restricciones y la función objetivo como funciones lineales de estas variables. Cuando se utilizan variables binarias y aún no se domina la técnica, es frecuente la tentación de multiplicar variables. Esto daría lugar a un modelo no lineal (frecuentemente

con variables enteras), de resolución mucho más compleja que la programación entera. Es útil también diseñar un modelo válido para cualquier valor de los parámetros del sistema.

6.1.3 Test del modelo obtenido en programas informáticos

La última etapa sería la comprobación de que el modelo diseñado es correcto. No existe una forma segura de comprobarlo, aunque en muchas ocasiones suele ser útil introducir el modelo obtenido en un programa informático de resolución de modelos lineales, y comprobar:

- a) Que la solución obtenida sea compatible con las restricciones del modelo.
- b) La solidez del modelo frente a la variación de sus parámetros (principalmente coeficientes de coste y términos independientes de las restricciones).

6.2 Problemas resueltos de modelización avanzada

Este apartado contiene los enunciados de siete modelos de programación lineal avanzada, con su correspondiente resolución. Seguidamente comentaremos brevemente cada uno de ellos:

El primer problema (SAILCO IOTS) es un ejemplo de problema de plan de producción, en el que las puntas de demanda pueden resolverse de dos modos: produciendo en horas extra, o produciendo en periodos anteriores y pasando la producción al mes siguiente por medio de stocks. Este mismo enunciado puede resolverse por otros modelos, como el programa del transporte.

El segundo (TALADROS MECÁNICOS) es un problema de reparto de recursos escasos a diversas actividades con diversa rentabilidad. Su estructura es esencialmente la de un problema de máximo en forma canónica.

El problema FAST CATERING es similar al anterior, pero con la particularidad de que se plantea la posibilidad de reutilizar (a cambio de un coste) recursos empleados en etapas anteriores.

El problema MUEBLES LA SENIA introduce la problemática de repartir recursos a productos de estructura compleja (que se tratan extensivamente con técnicas como el MRP, que se verán en otras asignaturas de la carrera). También introduce el uso de variables binarias para representar situaciones de coste fijo, así como de alternativas mutuamente excluyentes.

El quinto problema (MOLDES DE INYECCIÓN DE PLÁSTICO) es similar al segundo, pero con la utilización de variables binarias.

El sexto problema (ACEITE DE OLIVA CON DENOMINACIÓN DE ORIGEN) es un caso prototipo de problema de mezcla: los productos finales son el resultado de la mezcla, en determinadas proporciones, de materias primas o productos intermedios.

Finalmente, el problema BAZAR EL LINCE es similar al primero, pero aplicado a las compras en vez de la producción. También se introduce la posibilidad de representar situaciones de utilidad o coste variable con la cantidad comprada.

Problema 6.2.1 Sailco Iots S.A

Sailco Iots S.A. es una empresa que fabrica una embarcación homologada por la International Yacht Racing Union (I.Y.R.U.) y que ha tenido un notable éxito de ventas desde su aparición en el mercado, tanto en el terreno nacional como en las exportaciones.

SAILCO IOTS, S.A. debe decidir cuántas de estas embarcaciones debe construir en cada uno de los cuatro próximos trimestres. La previsión de la demanda para los próximos cuatro períodos es la siguiente:

Trimestre	Nº de embarcaciones
Primero	40
Segundo	60
Tercero	75
Cuarto	25

Una decisión estratégica de la compañía no concibe roturas de stocks, ya que considera que se debe servir la demanda prevista en el mismo trimestre, sin retrasar entregas.

Al principio del primer trimestre, tiene un stock de 10 embarcaciones (por tanto, el stock inicial es de 10 unidades). Al principio de cada trimestre se decide cuántas embarcaciones deben producirse. Se considera que las embarcaciones fabricadas durante un trimestre pueden usarse para satisfacer la demanda del mismo trimestre.

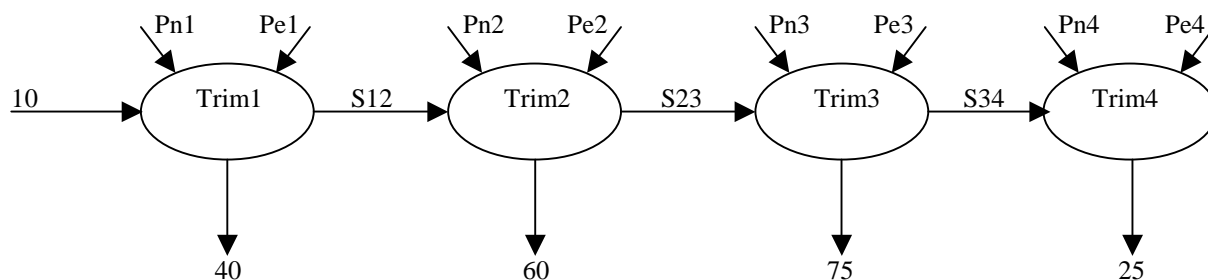
Cada trimestre, Sailco Iots S.A. tiene una capacidad productiva de 40 unidades en el tiempo de producción normal de trabajo a un coste de 400 um/embarcación Contratando empleados a tiempo extra durante un trimestre, es posible producir embarcaciones adicionales a un coste total de 450 u.m./embarcación.

Al final del trimestre (después de que la producción se haya completado y la demanda del trimestre haya sido satisfecha), se incurre en unos costes de mantenimiento del stock de 20 um (unidades monetarias) por cada embarcación que queda almacenada.

Se trata de planificar la producción de manera que se minimicen los costes para los próximos 4 trimestres.

Resolución del problema Sailco Iots S.A.

Como todos los problemas de plan de producción, en el que un recurso puede producirse en un periodo y utilizarse en periodos posteriores (mediante inventarios) o utilizarse para servir la demanda de periodos anteriores (admitiendo diferimiento), puede obtenerse el modelo con la ayuda de un esquema de este tipo:



Definimos las variables:

Pn,i: nº de embarcaciones fabricadas en el trimestre “i” trabajando a tiempo de producción normal.

$P_{e,i}$: nº de embarcaciones fabricadas en el trimestre “i” trabajando a tiempo extra.

$S_{i,i+1}$: nº de embarcaciones en stock, almacenadas del trimestre “i” al trimestre “i+1”.

Las tres variables son enteras (aunque también podría modelizarse con variables reales y el resultado sería entero, al haber detrás de este modelo un problema del transporte con demanda entera).

Función Objetivo:

$$[\text{MIN}] Z = 400 \cdot (P_{n1} + P_{n2} + P_{n3} + P_{n4}) + 450 \cdot (P_{e1} + P_{e2} + P_{e3} + P_{e4}) + 20 \cdot (S_{12} + S_{23} + S_{34})$$

400 es el precio en unidades monetarias que cuesta producir una embarcación trabajando en horas normales. 450 es el precio en um (unidades monetarias) que cuesta producir una embarcación trabajando a tiempo extra. 20 es el precio en um que se ha de pagar por tener almacenada una embarcación de un trimestre a otro.

Restricciones:

Como la producción máxima trabajando las horas normales es 40, obtenemos las cuatro primeras restricciones:

$$P_{n1}, P_{n2}, P_{n3}, P_{n4} \leq 40$$

Con estas restricciones expresamos la limitación de capacidad de producción en horas normales. El modelo no requiere limitaciones para la producción en horas extra $P_{e,i}$, ni valores de stock máximos o mínimos: la no negatividad de las variables asegurará que no tengamos ruptura de stock.

$$P_{n1} + P_{e1} + 10 = 40 + S_{12}$$

$$P_{n2} + P_{e2} + S_{12} = 60 + S_{23}$$

$$P_{n3} + P_{e3} + S_{23} = 75 + S_{34}$$

$$P_{n3} + P_{e3} + S_{23} = 75 + S_{34}$$

Estas son las restricciones de equilibrio del material, nos igualan el nº de embarcaciones que se fabrican en el trimestre más las que hay almacenadas del trimestre anterior con las que se X demandan en el trimestre más las que quedan en stock para el próximo trimestre. Como el problema no exige valores mínimos de stock y buscamos minimizar los costes, hemos considerado el stock final como 0. Igualmente, si en lugar de poner 0 hubiéramos puesto una variable –por ejemplo, S_{45} – el programa nos habría devuelto como valor de dicha variable 0. El programa busca minimizar la función costes y todo stock supone unos gastos de almacenamiento.

Finalmente, debemos tener en cuenta que todas las variables son positivas, puesto que no tiene sentido un stock o una producción negativas:

$$P_{n1}, P_{n2}, P_{n3}, P_{n4}, P_{e1}, P_{e2}, P_{e3}, P_{e4}, S_{12}, S_{23}, S_{34} \geq 0$$

Problema 6.2.2 Taladros mecánicos

Una fábrica productora de herramientas industriales y para bricolage lanzó al mercado una línea de taladradoras para uso doméstico. Un taladro mecánico consiste básicamente en un motor eléctrico colocado en una carcasa de plástico y metal. Se fabrican cuatro modelos que difieren en el tamaño y composición de la carcasa y en el dimensionado de los motores. Los modelos 1 y 2 son tradicionales mientras que los 3 y 4 son más modernos, los cuales se caracterizan porque las carcasas son básicamente de plástico.

La empresa ha desarrollado la tecnología necesaria para fabricar las carcasas, hacerse el bobinado de los motores o los cables eléctricos de los motores.

Una escasez en la aleación de cobre usada en la producción de cable y en la constitución de las partes metálicas de las carcasas está causando problemas a la empresa, por lo que el próximo Plan Trimestral se verá afectado. En la tabla adjunta se dan los requerimientos de materiales para los cuatro modelos. No podrá disponerse de más de 16.000 libras (1 libra = 453.6 g) de plástico durante el período y no se tendrán más de 5.000 libras de aleación de cobre.

El cable para los motores se obtiene de dos fuentes. Puede ser producido internamente a un coste de 14 um/metro de la aleación de cobre disponible en máquinas con una capacidad trimestral de 60.000 metros. Cada 100 metros de cable precisa de 3.6 libras de aleación de cobre. Por otra parte, puede ser comprado a proveedores exteriores en cantidades virtualmente ilimitadas a 29 um/metro.

El stock inicial al principio del trimestre es de 6.000 metros de cable. Los otros materiales necesarios para la producción de estos modelos de taladros están en existencias y pueden ser obtenidos fácilmente.

El departamento de compras cree que todos los taladros que se fabriquen se venderán; sin embargo, existe un compromiso con los distribuidores para que las cantidades a producir de los modelos 1 y 2 sean al menos tantas como las de los modelos del tipo 3 y 4.

Modelo	1	2	3	4
Plástico necesario (lb.)	0.82	0.62	1.42	2.03
Aleación de cobre necesaria para las carcasas (lb.)	0.43	0.69	0.33	0.20
Cable necesario para el motor (lb.)	15	16	9	9
Beneficio (excluido el coste del cable) (€)	12.50	11.30	17.20	19.90

Resolución del problema Taladros mecánicos

Las variables son aquellas cantidades que nosotros tendremos que buscar para que nuestro problema nos dé el óptimo según la función objetivo.

Ti: Número de taladros producidos del tipo “i”. Será un número entero, dado que no podemos tener partes fraccionarias de taladro (medio taladro, ni $\frac{3}{4}$ de taladro...)

Ci: metros de cable fabricado por nosotros (14 pts/m). Como es más económico, queremos fabricar mucho, pero el enunciado nos limita la cantidad que podremos servir.

Ce: metros de cable que compramos fuera. Una vez sabemos cuantos metros de cable necesitamos, y los que podremos fabricar nosotros, tendremos que comprar fuera los que nos falten.

Co: metros de cable inicial que teníamos en stock. No se tendrán que volver a pagar, dado que son restos de un pedido de cable del año anterior, que ya se pagó.

Estas últimas variables serán reales; puesto que podremos comprar unidades fraccionarias de producto (por ejemplo, 4.3m).

Al ejecutar un procedimiento de resolución (por ejemplo, el método *simplex*), podremos encontrar la solución buscada. No obstante, nosotros nos encargaremos, únicamente, de plantear el modelo. La resolución puede hacerse a través de *software*.

Restricciones

[1] La cantidad máxima consumida de plástico está limitada por el enunciado a 16.000 libras. Las cantidades de plástico que necesitamos para fabricar cada taladro vienen dadas en las tablas.

$$T1 \cdot 0,82 + 0,62 \cdot T2 + 1,42 \cdot T3 + 2,03 \cdot T4 \leq 16.000$$

Para fabricar T1, necesitaremos 0,82 libras de plástico. Para fabricar T2 necesitaremos 0,62, etc... Pero el máximo que podremos utilizar será de 16.000 libras.

Hay que tener cuidado con las unidades de las restricciones. En este caso, todas están en libras (peso).

[2] La aleación de Cu también nos viene limitada.

$$0,43 \cdot T1 + 0,69 \cdot T2 + 0,33 \cdot T3 + 0,2 \cdot T4 + Ci \cdot 0,036 \leq 5.000$$

La aleación no sólo sirve para la fabricación de carcasas, sino también para la fabricación de cable. Sabemos que se necesitarán 3,6 libras de Cu cada 100 metros de cable que se quiera fabricar. Sólo gastaremos aleación en el cable que fabriquemos nosotros, porque lo comprado de fuera se paga, pero no se gasta del propio cobre.

Fijándonos en la tabla adjunta, para fabricar T1 necesitaremos 0,43 libras de Cu, para fabricar T2 necesitaremos 0,69...

[3] Condición de cable necesario (en libras):

$$15 \cdot T1 + 16 \cdot T2 + 9 \cdot T3 + 9 \cdot T4 = (Ci + Ce + Co) \cdot 0,036$$

$$Ci \leq 60.000$$

$$Co = 6.000$$

A pesar de que no producimos nosotros el Ce , es cierto que éste intervendrá en la cantidad de cable que necesitamos para producir el óptimo de taladros. No es una restricción sobre cuanta aleación necesitamos, sino de cantidad de cable.

Función Objetivo:

Lo que buscamos es maximizar los beneficios:

$$[MAX]Z = 12,5 \cdot T1 + 11,3 \cdot T2 + 17,2 \cdot T3 + 19,9 \cdot T4 - (14 \cdot Ci + 29 \cdot Ce)$$

El beneficio es la diferencia entre las ganancias y los gastos. Las ganancias vienen dadas por el valor de aquello que se gana por cada tipo de taladro menos el que cuesta fabricarlo: intervendrán todos los tipos de cables, excepto el que ya teníamos, que no nos supone ningún coste (Co ya lo pagamos con anterioridad).

Problema 6.2.3 Fast Catering S.A.

La empresa Fast Catering S.A. especializada en trabajos de restauración en congresos y otros eventos, ha sido encargada del suministro de los *lunchs* (comida de mediodía) del próximo Congreso Internacional sobre Desarrollo Sostenido II que se celebrará en el Campus de Terrassa en la semana del 21 al 27 de junio: más concretamente los días 21, 22, 23, 24 y 25 de dicha semana (lunes, martes, miércoles, jueves y viernes).

Para llevar a cabo el suministro de la comida, bebida y material necesario para los *lunchs*, Fast Catering S.A. ya ha resuelto la problemática relativa a la comida y bebida, pero se encuentra ante un problema no resuelto en lo referente a cubiertos y servilletas, ya que a la empresa se le presentan dos posibles estrategias para el aprovisionamiento de dicho material. Sobre estas diferentes posibilidades de suministro hablaremos más adelante.

La empresa conoce las necesidades de “conjuntos” para cada uno de los días del congreso, necesidades que se indican a continuación:

	<i>Día</i>	<i>Nº de conjuntos</i>
<i>Lunes</i>	21/6	2.000
<i>Martes</i>	22/6	2.200
<i>Miércoles</i>	23/6	3.000
<i>Jueves</i>	24/6	3.000
<i>Viernes</i>	25/6	2.500

Un conjunto consta de un tenedor de pescado, una pala de pescado, una cuchara, un tenedor de carne, un cuchillo de carne, una cuchara de postre, un cuchillo de postre, un tenedor de postre y una servilleta de tela.

La empresa puede optar, ya sea por comprar los conjuntos a un proveedor de Barcelona a 600 u.m. el conjunto o enviar los conjuntos ya utilizados en un *lunch* a un servicio de lavado, que los devuelve limpios y prestos a ser utilizados a un coste de 200 um si los devuelve al cabo de 24 horas, o a un coste de 300 um si los devuelve al cabo de 12 horas (servicio exprés). Obviamente, se puede optar por utilizar simultáneamente ambas estrategias, es decir, cada día comprar algunos conjuntos y enviar a lavar otros.

Los conjuntos ya utilizados se envían al servicio de lavado a las 17 horas. Los *lunchs* se inician siempre a las 13 horas, iniciándose la preparación de las mesas por parte de nuestra empresa a las 9 horas.

A usted, que es el gerente de Fast Catering, S.A. le parece que conoce un modelo que soluciona este tipo de problemas, ¿puede hacerlo? Sólo es necesario modelizar la situación, ya que se dispone de un ordenador y un *software* de optimización que, una vez planteado el modelo, proporcionará la estrategia a seguir.

NOTA: para el primer día dispone de 500 “conjuntos” provenientes de otro congreso celebrado anteriormente al finalizar el congreso no es necesario lavar los conjuntos.

Resolución del problema Fast Catering S.A.

Variables

Queremos conocer cuántos conjuntos se tienen que comprar cada día (si es que hace falta), cuántos se deben llevar a lavar de forma rápida (más cara, pero también más cómoda) y cuántos de forma lenta (más económica).

C_i : Conjuntos comprados el día “ i ”

El primer día será imprescindible que se compren, ya que no disponemos de suficientes conjuntos, pero el resto de días no lo sabemos, dado que dependerá de los conjuntos que nos lleguen limpios de días anteriores.

$NR_{i,j}$: Conjuntos que van a la Limpieza Rápida el día “ i ” y los tenemos limpios y listos para utilizar el día “ j ”. Como es rápido, en este caso $j=i+1$

$N_{Li,j}$: Conjuntos que van a la Limpieza Lenta el día “i”, para estar listos el día “j”. En este caso, $j=i+2$.

T_i : Número de conjuntos que se decide no lavar de ningún modo, y que por lo tanto van a la basura.

Restricciones

[A] Cada día debe cumplirse que las entradas de conjuntos al comedor han de ser iguales a las salidas.

$$\begin{aligned} 500 + C_1 &= NR_{12} + NL_{13} + T_1 \\ NR_{12} + C_2 &= NR_{23} + NL_{24} + T_2 \\ NR_{23} + NL_{13} + C_3 &= NR_{34} + NL_{35} + T_3 \\ NR_{34} + NL_{24} + C_4 &= NR_{45} + T_4 \\ C_5 + NR_{45} + NL_{35} &= T_5 \end{aligned}$$

Los conjuntos que se laven de forma lenta no se podrán guardar para utilizarlos más a delante, sino que se utilizarán al recibirlos otra vez. Esto hace que no se pueda pasar más de 2 días entre la salida de los conjuntos hacia la lavandería y la vuelta de los mismos.

[B] Se ha de cumplir la demanda, como mínimo.

Lo que no podemos hacer es quedarnos cortos ante una cierta demanda. Así pues, nos tenemos que asegurar que, como mínimo, ésta se pueda cubrir. Es decir, el número de conjuntos que entren al comedor un día determinado debe ser superior o igual a la demanda del mismo día. “Superior” porque de este modo podría tenerse conjuntos que pasaran a lavarse, aunque no hayan sido utilizados, si fuera más económico que comprarlos nuevos, y así poderlos utilizar en días posteriores. Vemos que los conjuntos que pasen de un día hacia otro siempre pasarán por la lavandería causando un gasto. Nos lo podríamos imaginar como si no tuviéramos sitio donde dejarlos, y la lavandería nos los recoge todos, a cambio de que todos sean lavados.

$$\begin{aligned} 500 + C_1 &\geq 2000 \\ NR_{12} + C_2 &\geq 2200 \\ NR_{23} + NL_{13} + C_3 &\geq 3000 \\ NR_{34} + NL_{24} + C_4 &\geq 3000 \\ C_5 + NR_{45} + NL_{35} &\geq 2500 \end{aligned}$$

Función Objetivo:

$$[MIN]Z = 600 \cdot (C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5) + 300 \cdot (NR_{12} + NR_{23} + NR_{34} + NR_{45}) + 200 \cdot (NL_{13} + NL_{24} + NL_{35})$$

Lo que queremos es minimizar los costes que nos supondrá comprar o lavar los conjuntos. Dados los precios que marca el enunciado: la compra de conjuntos es de 600 um/conjunto; los rápidos son a 300 um y los lentos son a 200 um.

Problema 6.2.4 Muebles La Senia

La empresa Muebles La Senia se dedica a la fabricación de camas, mesitas de noche, armarios y sillas, a partir de 3 materias primas: madera de haya, de pino y contrachapado.

La materia prima se compra a 500 um/kg. la madera de haya, a 400 um/kg la de pino y a 300 um/kg el contrachapado. Para la fabricación de los productos se requiere las siguientes cantidades de materia prima por unidad de producto:

	Mesitas	Camas	Armarios	Sillas
Haya	6 kg	8 kg	10 kg	6 kg
Pino	5 kg	9 kg	15 kg	6 kg
Contrachapado	1 kg	8 kg	7 kg	1 kg

Los suministradores de materias primas nos han comunicado que las cantidades máximas que pueden servirnos son 30.000 kg de haya, 25.000 de pino y 10.000 de contrachapado.

Muebles La Senia no vende los artículos de forma individual, sino que vende combinados de ellos. Los “combis” que actualmente comercializa son tres:

Combi	Composición	PVP (haya)	PVP (pino)
Dúo	Cama + Armario	40.000	35.000
Custom	Cama + 2 mesitas + Armario	85.000	75.000
Comfort	Cama + 2 mesitas + Armario + 2 sillas	95.000	88.000

El director está planteándose la comercialización de un nuevo “combi” llamado *Loft*, destinado a satisfacer la demanda originada por el incipiente aumento de pisos de solteros y separados que está produciéndose en los últimos años. *Loft* constará solamente del producto cama. Se cree que es un producto que sólo debería comercializarse en la versión madera de pino, dado el alto margen que proporcionaría y la elevada aceptación que el producto presenta en su versión pino. El precio de venta del producto será de 30.000 um. El director comercial ha comentado que si se vende el nuevo “combi”, no podrá comercializarse ni *Custom* ni *Dúo* (en sus dos versiones), con el fin de mantener una gama equilibrada.

La demanda prevista para los “combis” actuales es la siguiente:

Combi	Pino	Haya
Dúo	500 uu	350 uu
Custom	400 uu	410 uu
Comfort	475 uu	275 uu

Muebles La Senia no desea acumular stocks de los combis *Dúo*, *Custom* y *Comfort*, por ser productos con diseño de temporada, lo que imposibilitará la venta rentable de estos productos el próximo año.

Para el “combi” *Loft* se conoce la demanda máxima (300 uu) y demanda mínima (100 uu), previstas en función de que el producto tenga “mucho éxito” o únicamente “éxito” (descartándose el fracaso), creyendo que ambas situaciones pueden darse con igual posibilidad. El director comercial desea cubrir exactamente la cantidad que espera vender de “combis” *Loft*.

La organización ecologista Verde Paz obliga al pago de un canon por el consumo de madera, que en el caso de haya es de 2.350.000 um y del pino de 1.900.000 um..

Los costes de mano de obra son fijos y ascienden a 6.000.000 um, mientras que el presupuesto máximo disponible es de 80.000.000 um.

Plantear el programa lineal que permita la maximización de beneficios.

Resolución del problema Muebles La Senia

La primera tabla del enunciado nos muestra las cantidades necesarias de materia prima para la fabricación de los diferentes muebles.

La segunda tabla nos da la información sobre qué es lo que incluye cada uno de los “combi”.

Aparte de los que se incluyen en la tabla, también existe el modelo *Loft*, que nos dicen que, si se fabrica, no se podrán fabricar ni *Custom* ni *Dúo*, en ninguna de sus dos opciones de madera.

Las estimaciones de demandas en los diferentes “combi” se muestran en la última tabla, donde falta la información sobre el *Loft*. Ésta se puede obtener de lo que se ha expuesto como éxito o mucho éxito del “combi”: La demanda máxima será de 300 unidades, la demanda mínima será de 100 unidades. Ambas situaciones tienen las mismas probabilidades de que sucedan: 50%. Se puede, pues, deducir que la demanda será la media entre la máxima y la mínima: 200 unidades.

Cabe subrayar que el programa que se pide es lineal, con lo cual no podremos multiplicar variables entre ellas, sean de los tipos que sean.

Planteamiento

Como nos pedían que optimizáramos beneficios –y los beneficios vienen dados por la diferencia entre el PVP y el coste de producción–, calcularemos inicialmente los costes que nos supone la fabricación de cada “combi”, en cuanto a material.

Variables de Decisión:

HA : Variable binaria (tiene valor 1 cuando producimos con haya y 0 cuando no lo hacemos).

PI : Variable binaria (tiene valor 1 cuando producimos con pino y 0 cuando no lo hacemos).

BLOFT: Variable binaria (tiene valor 1 cuando producimos *Loft* y 0 cuando no lo hacemos).

DUOHA : Unidades producidas del combi *Dúo* hechas de haya.

DUOPI: Unidades producidas del combi *Dúo* hechas con pino.

CUSTHA: Unidades de *Custom* hechas con haya.

CUSTPI: Unidades de *Custom* hechas con pino.

COMHA: Unidades de *Comfort* hechas con haya.

COMPI: Unidades de *Comfort* hechas con pino.

LOFT : Unidades de *Loft* producidas (solo pueden ser de pino).

Estas últimas variables son enteras, dado que cuentan unidades enteras.

Restricciones

[A] Las cantidades de haya que podemos utilizar están restringidas a 30.000 kg.

Las cantidades de haya vendrán dadas por todos los elementos de cada “combi” que están hechos con haya.

DUOHA : $(8 + 10) \cdot \text{DUOHA}$

Cantidad de unidades de *Dúo* de haya, multiplicado por kg que necesita una mesilla y un armario, que son los que componen el “combi”.

CUSTHA: $(8 + 10 + 2 \cdot 6) \cdot \text{CUSTHA}$

En este caso el “combi” viene dado por el mismo que el *Dúo*, más dos mesillas.

$$\text{COMHA: } (8 + 10 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6) \cdot \text{COMHA}$$

Este “combi” incluye el mismo que el anterior más dos sillas.

Como *Loft* sólo puede ser de pino, no intervendrá en este apartado.

Entonces podríamos concluir esta restricción haciendo el cálculo conjunto:

$$(8 + 10) \cdot \text{DUOHA} + (8 + 10 + 2 \cdot 6) \cdot \text{CUSTHA} + (8 + 10 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6) \cdot \text{COMHA} \leq 30.000 \cdot \text{HA}$$

Notamos que en la restricción aparece la variable binaria HA. Esta tiene razón de ser porque nadie nos asegura que fabriquemos “combis” con haya. Si HA toma el valor de 0, esto querrá decir que las variables anteriores (DUOHA, CUSTHA, COMHA) también tomarán el valor 0. Si se hicieran, HA=1 y el resto de variables tomarían los valores óptimos para el conjunto del problema, con el fin de maximizar los beneficios.

[B] Las cantidades de pino también están restringidas a 25.000 kg. Haremos, pues, lo mismo que antes, pero con los valores correspondientes al pino:

$$(9 + 15) \cdot \text{DUOPI} + (9 + 15 + 2 \cdot 5) \cdot \text{CUSTPI} + (9 + 15 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6) \cdot \text{COMPI} + \text{LOFT} \cdot 9 \leq 25.000 \cdot \text{PI}$$

Igual que en la restricción anterior, no sabemos si habrá muebles fabricados con pino en el óptimo. Nadie nos obliga a que los fabriquemos. Así pues, se tiene que hacer que la restricción sólo sea activa en los casos en que sí se fabriquen. Por este motivo introducimos la variable binaria PI.

[C] El “contrachapado” nos viene limitado a un máximo de 10.000 kg. Tenemos que tener presente que el “contrachapado” está en todos los casos.

$$(\text{DUOPI} + \text{DUOHA}) \cdot (8 + 7) + (\text{CUSTPI} + \text{CUSTHA}) \cdot (8 + 7 + 2 \cdot 1) + (\text{COMPI} + \text{COMHA}) \cdot (8 + 7 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1) \leq 10.000$$

[D] La siguiente restricción ya ha sido comentada al principio del problema, pero se tendría que añadir: cantidad media esperada de demanda de *Loft*.

$$0,5 \cdot 300 + 0,5 \cdot 100 = 200$$

[E] Como en las restricciones anteriores, no es cierto que hagamos combis *Loft*, sino que es una posibilidad excluyente del *Dúo* y *Custom*.

$$\text{LOFT} = 200 \cdot \text{BLOFT}$$

Si BLOFT =1, produciremos el modelo LOFT; si BLOFT = 0, no se producirán.

[F] El hecho de producir *Loft* nos imposibilita el producir *Dúo* y *Custom*, en sus 2 versiones:

$$\text{DUOPI} \leq 500 (1 - \text{BLOFT})$$

$$\text{DUOHA} \leq 350 (1 - \text{BLOFT})$$

$$\text{CUSTPI} \leq 400 (1 - \text{BLOFT})$$

$$\text{CUSTHA} \leq 410 (1 - \text{BLOFT})$$

La producción de cada combi debe ser más pequeña o igual a la demanda, en el caso que no produjésemos *Loft* (caso en que BLOFT=0). Si producimos, BLOFT=1, se nos anularán todas estas variables de decisión: DUOPI, DUOHA, CUSTPI, CUSTHA.

[G] Tenemos un presupuesto máximo de 80.000.000 um: Los costes vienen dados por kg de materia prima consumida. El haya tiene un precio de 500 um/kg.; el pino cuesta unas 400 um/kg y el contrachapado unas 300 um/kg. Los kg de cada “combi”, como en restricciones anteriores, vienen dados por las unidades y el tipo de muebles que lo componen. El tipo de muebles sólo nos interesa para saber cuántos kg de materia necesitaremos. En la ecuación de costes también hay que incorporar los cánones ecologistas para autorizar el consumo de madera de los tipos haya y pino.

$$[(DUOPI+DUOHA) \cdot (8+7) + (CUSTPI+CUSTHA) \cdot (8+7+2 \cdot 1) + (COMPI+COMHA) \cdot (8+7+2 \cdot 1+2 \cdot 1)] \cdot 300 + [(9+15) \cdot DUOPI + (9+15+2 \cdot 5) \cdot CUSTPI + (9+15+2 \cdot 5+2 \cdot 6) \cdot COMPI + LOFT \cdot 9] \cdot 400 + [(8+10) \cdot DUOHA + (8+10+2 \cdot 6) \cdot CUSTHA + (8+10+2 \cdot 6+2 \cdot 6) \cdot COMHA] \cdot 500 + 2.350.000 \cdot HA + 1.900.000 \cdot PI \leq 80.000.000$$

La Función Objetivo encontrará las cantidades apropiadas para que los beneficios sean máximos. Para poder encontrar los beneficios, tendremos que conocer la diferencia entre el PVP (precio venta al público) y el coste que a nosotros nos supone.

$$[MAX]Z = LOFT \cdot (30.000 - 400 \cdot 9) + DUOPI [35.000 - (9+15) \cdot 400] + CUSTPI [75.000 - (9+15+2 \cdot 5) \cdot 400] + COMPI [88.000 - (9+15+2 \cdot 5+2 \cdot 6) \cdot 400] + DUOHA [40.000 - (8+10) \cdot 500] + CUSTHA [85.000 - (8+10+2 \cdot 6) \cdot 500] + COMHA [95.000 - (8+10+2 \cdot 6+2 \cdot 6) \cdot 500] - [2.350.000 \cdot HA + 1.900.000 \cdot PI]$$

Problema 6.2.5. Moldes de Inyección de Plástico

Una empresa de fabricación de piezas mediante inyección de plástico está considerando cuál sería el mejor diseño de moldes para la fabricación de una pieza. Actualmente se dispone de tres tamaños de moldes y de una máquina. Los moldes son adaptables a la máquina de inyección que tenemos disponible, pero sólo se puede instalar un molde (de tamaño y cavidades determinadas). Si el molde es más grande, la máquina puede hacer menos inyecciones por minuto; no obstante, puede ser que la producción en piezas/hora aumente por el hecho de que, si un molde es más grande, pueden mecanizarse más cavidades.

El coste de mecanización de una cavidad, en cualquiera de los moldes, es de 50 euros. Aparte, cada molde tiene un coste base, es decir, sin contar las cavidades que posteriormente se hagan.

En la tabla siguiente se reflejan las capacidades de cada molde, su coste base, y la velocidad de funcionamiento del molde:

Moldes	Cavidades	Coste base del molde	Inyecciones/min.
Pequeños	1 a 5	500 euros	10
Mediano	6 a 10	850 euros	7
Grande	11 a 15	1100 euros	5

La producción mínima ha de ser de 150.000 piezas en una semana, trabajando 8 horas diarias y 5 días a la semana sin descanso de la máquina.

Por otro lado, la inversión máxima de la que se dispone para este proyecto es de 1.500 euros.

Se nos pide determinar el tipo de molde y el número de cavidades que han de mecanizarse para obtener la máxima productividad compatible con la inversión.

Resolución del problema Moldes de Inyección de Plástico

Dados tres tipos de moldes, de diferentes tamaños, se tienen que determinar la cantidad de cavidades que éstos han de tener –dentro de unos límites marcados por las restricciones de la tabla– para que haya una máxima productividad a un coste mínimo.

Variables:

C_p : Número de cavidades en el molde pequeño.

C_g : Número de cavidades en el molde grande.

C_m : Número de cavidades en el molde mediano.

Las tres son enteras.

P : Variable binaria que indica qué tipo de molde se escoge. Si $P = 1$, quiere decir que se ha escogido el molde pequeño; si $P = 0$, sucede que no se se ha escogido el molde pequeño.

G : Variable binaria que indica si se escoge el molde grande.

M : Variable binaria que indica si se escoge el molde mediano.

Estas tres última variables las necesitamos porque en el enunciado se especifica que sólo se puede instalar un molde con el número de cavidades que surja en el óptimo.

Restricciones:

[A] Sólo podemos utilizar un molde. Las variables son excluyentes, porque si escogemos el pequeño, ni el grande ni el mediano se podrán utilizar. Así sucesivamente.

$$P + M + G \leq 1$$

[B] Cada tipo de molde tiene unas capacidades específicas, detalladas en el cuadro adjunto, que se traducen matemáticamente en:

$$\begin{aligned} C_p &\leq 5 \cdot P ; C_p \geq P \\ C_m &\leq 10 \cdot M ; C_m \geq 6 \cdot M \\ C_g &\leq 15 \cdot G ; C_g \geq 11 \cdot G \end{aligned}$$

Vemos que, por ejemplo, en el molde mediano, las cavidades que se pueden hacer oscilan entre 6 y 10. Utilizamos la variable binaria “M” porque no es seguro que se vaya a utilizar el molde mediano (si $M = 0$, no se utilizará). Pero si no se utiliza este molde, las dos restricciones obligarían a anular la variable C_m , puesto que C_m quedaría:

$$0 \leq C_m \leq 0$$

Cuando no hay cavidades en un molde quiere decir que ese molde no se utiliza (explícito en la tabla adjunta).

[C] Producción mínima permitida es de 150.000 piezas / semana:

$$600 \text{ inyecciones/h} \cdot 8 \text{ h/ día} \cdot 5 \text{ días/ semana} \cdot C_p + 420 \cdot 40 \cdot C_m + 300 \cdot 40 \cdot C_g \leq 150.000$$

600 inyecciones / hora = 10 iny. / min * 60 min / h

420 iny. / h = 7 iny. / min * 60 min / h

300 iny. /h = 5 iny. / min * 60 min / h

[D] Tenemos un máximo de inversión permitida = € 1500

$$500 * P + 850 * M + 1100 * G + 50 (Cp + Cg + Cm) \leq 1500$$

El coste de cada molde se compone por un coste base, que se pagará únicamente si utilizamos aquel molde (por eso se multiplican por las binarias) más el precio de € 50 / cavidad que se haga en el molde escogido. Ya nos viene determinado por restricciones anteriores el hecho de tener sólo C_p o C_g o C_m , pero las tres a la vez no se puede.

Función Objetivo:

Queremos minimizar los costes, que vendrán dados por lo que tenemos que pagar por tener el molde con sus correspondientes cavidades.

$$[\text{MIN}]Z = 500 \cdot P + 850 \cdot M + 1100 \cdot G + 50 \cdot (C_p + C_g + C_m)$$

Problema 6.2.6 Aceite de oliva con denominación de origen

Una prestigiosa marca productora y distribuidora de aceite de oliva nos ha pedido que le diseñemos acusadamente un plan de producción para la próxima temporada. La empresa nos ha facilitado datos sobre los costes de producción que tiene y los tipos de producto que comercializa. Partiendo de estos datos, desea que nosotros obtengamos las cantidades que hace falta comercializar de cada producto de manera que el beneficio total (la suma de las ganancias provenientes de cada producto) sea máximo.

El proceso productivo consiste en obtener aceite de oliva prensando un tipo de oliva que se cultiva en la provincia. Como materia prima llegan a la prensa aceitunas cogidas por los agricultores y pasan directamente a la prensa de donde se extrae el aceite de oliva virgen extra de primera prensada. El residuo resultante de la primera prensada puede pasar por un molino para extraer el aceite de oliva virgen de segunda prensada. A la materia resultante aún se pueden añadir unos productos químicos que ayudan a separar el aceite restante de la pulpa obteniendo, después de la tercera prensada y el correspondiente refino, un aceite de oliva refinado de menos calidad. El compuesto resultante no se aprovecha.

Las cantidades obtenidas de un kilo de aceitunas son 0.1 litros de aceite de oliva **virgen extra** (1ª prensada), 0.15 litros de aceite de oliva **virgen** (2ª prensada) y 0.06 litros de aceite **refinado** (3ª prensada). Los costes para obtener un litro de estos productos son 450 um/litro, 100 um/litro y 120 um/litro respectivamente. (Se debe tener en cuenta que para poder hacer la primera prensada se deben comprar las aceitunas a los agricultores, es por este hecho que obtener un litro de aceite de oliva virgen extra es mucho más caro.)

Los productos finales que la empresa comercializa son 5 tipos de aceite provenientes de la mezcla de las tres prensadas. En la tabla siguiente se encuentran las composiciones de cada tipo de producto final, así como el precio de venta a mayoristas:

<i>Tipo de aceite</i>	<i>Composición</i>	<i>Precio de venta</i>
Calidad Suprema	100% Aceite virgen extra	600 um/litro
Calidad Alta	70% Aceite virgen extra 30% Aceite virgen	450 um/litro
Calidad Mediana	50% Aceite virgen extra 50% Aceite virgen	400 um/litro
Calidad Baja	20% Aceite virgen extra 60% Aceite virgen 20% Aceite refinado	300 um/litro
Calidad Económica	50% Aceite virgen 50% Aceite refinado	200 um/litro

Se considera importante para potenciar una buena imagen de marca, que la cantidad comercializada del tipo de calidad alta no sea inferior a la cantidad comercializada del tipo de calidad baja.

Buscar un modelo matemático que nos permita encontrar la proporción que se tiene que comercializar de cada tipo de producto final

Resolución del problema Aceite de oliva con denominación de origen

En este problema no conocemos la cantidad de aceitunas iniciales que hemos comprado a los agricultores. Para solucionarlo, realizaremos el problema en cantidades relativas.

Variables:

Cs : Litros de aceite de la calidad suprema puestos en el mercado.

Ca: Litros de calidad alta.

Cm: Litros de calidad media.

Cb: Litros de calidad baja.

Ce: Litros de calidad económica.

Todas ellas serán variables reales.

P1 : Litros de aceite provenientes de la 1ª prensada, una vez fijada la cantidad en peso de materia prima.

P2: Litros de aceite de la 2ª prensada.

P3: Litros de aceite de la 3ª prensada.

También serán reales.

KO : Kilos de aceitunas. Fija la cantidad de materia prima en peso y permitirá calcular las proporciones de las otras variables (cantidades relativas). Variable Real.

Restricciones:

[A] Cada prensada nos proporcionará unos litros de aceite, que vienen determinados por la cantidad de KO iniciales:

$$\begin{aligned} P1 &\leq 0,1 \cdot KO \\ P2 &\leq 0,15 \cdot KO \\ P3 &\leq 0,06 \cdot KO \end{aligned}$$

[B] De cada prensada el aceite resultante se destina para obtener una u otra calidad; por ejemplo, de entre los litros de Ca, el 70 % de ellos será de la 1ª prensada; el 100% de Cs será de la primera prensada; tan sólo el 20% del aceite Cb será de la 1ª prensada. La suma de todos ellos será la cantidad de litros obtenidos en dicha prensada.

$$\begin{aligned} P1 &= Cs + 0,7 \cdot Ca + 0,5 \cdot Cm + 0,2 \cdot Cb \\ P2 &= 0,3 \cdot Ca + 0,5 \cdot Cm + 0,6 \cdot Cb + 0,5 \cdot Ce \\ P3 &= 0,2 \cdot Cb + 0,5 \cdot Ce \end{aligned}$$

[C] Ponemos como referencia una cota de 100 kg de olivas. Si no la pusiéramos, la región factible no estaría acotada y el óptimo sería impropio: no podríamos obtener soluciones. Igual que lo acotamos a 100, se podría acotar a cualquier otra cantidad.

$$KO \leq 100$$

[D] El enunciado no nos pide ni la cantidad de litros de aceite en la prensada 'i' (Pi), ni la cantidad de litros de aceite de calidad 'x' (Cx). Lo que nos pide es una cantidad relativa que nos diga, de entre todos los litros de aceite, qué proporción se dedica a qué calidad de aceite.

La proporción de aceite de calidad $i = C_i / \Sigma C_i$. Es por ello que la solución es independiente de KO .

[E] Por cuestiones de imagen, la cantidad de aceite de alta calidad no ha de ser inferior al de baja:

$$Ca \geq Cb$$

Función Objetivo:

Queremos saber qué cantidades debemos tener para obtener un máximo beneficio. Tendremos que calcular la diferencia entre el PVP y el coste que supone el producir cada tipo C_i :

$$Cs: 600 \text{ um/l} - 1 \cdot 450 \text{ um} = 150 \text{ um}$$

$$Ca: 450 \text{ um/l} - (0,7 \cdot 450 + 0,3 \cdot 100) \text{ um/l} = 105 \text{ um/l}$$

$$Cm: 400 \text{ um/l} - (0,5 \cdot 450 + 0,5 \cdot 100) \text{ um} / 1 = 125 \text{ um/l}$$

Etc...

El Ca está compuesto por el 70 % de extra y el 30% de virgen, cuyos costes son, respectivamente, 450 y 100 um/l.

$$[\text{MAX}]Z = 150 \cdot Cs + 105 \cdot Ca + 125 \cdot Cm + 126 \cdot Cb + 90 \cdot Ce$$

Solución obtenida con el Storm:

$Cs = 0$	$P1 = 10$
$Ca = 5$	$P2 = 15$
$Cm = 11$	$P3 = 6$
$Cb = 5$	$KO = 100$
$Ce = 10$	$Z^* = 3430$

No será rentable producir Cs , contrario a lo que nos podríamos imaginar.

A partir de estos resultados, tendremos que operar:

$$\text{Proporción de aceite } Ca : Q(Ca) = 5 / (0+5+11+5+10) = 0.1613$$

$$\text{Proporción de aceite } Cm : Q(Cm) = 11 / (0+5+11+5+10) = 0.3548$$

$$\text{Proporción de aceite } Cb : Q(Cb) = 5 / (0+5+11+5+10) = 0.1613$$

$$\text{Proporción de aceite } Ce : Q(Ce) = 10 / (0+5+11+5+10) = 0.3226$$

El 16,13 % del aceite producido será de calidad alta, al igual que el de baja; el 35,48% será de media; el 32,26 % será de calidad económica.

Problema 6.2.7 Bazar El Lince

Mohamed, propietario del Bazar El Lince tiene problemas con sus proveedores. Concretamente tiene que establecer un plan de aprovisionamiento tan económico como sea posible para aprovechar los descuentos que le ofrece la empresa de *car-audio* "Pioneroos".

Mohamed tiene muy claro el número de equipos "Pioneroos" que venderá mensualmente durante el próximo cuatrimestre, hecho que le representa una verdadera ventaja competitiva en el momento de negociar. Estos datos aparecen en la tabla siguiente:

Mes	Febrero	Marzo	Abril	Mayo
Cantidad	30	45	20	50

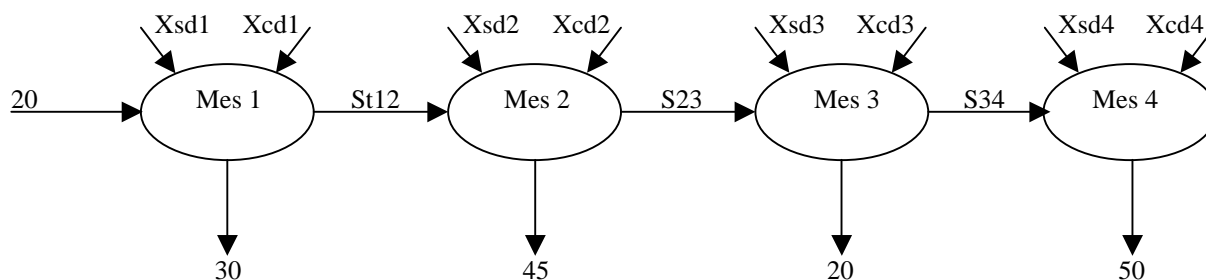
Por otro lado, el proveedor le ofrece unas condiciones muy tentadoras: si compra un equipo radio-CD individualmente, éste entrará al almacén en cuestión de horas pagando 140 €, pero si compra un lote de equipos superior a 35, del equipo 36º en adelante gozará de un descuento del 20% en su precio de compra. Por ejemplo, si decide comprar un lote de 37 equipos, pagará 35 de los equipos a 140 € y el resto (2 equipos) a 112 €.

Este problema quedaría fácilmente resuelto si no fuera porque Mohamed ha decidido penalizar con 10 € cada unidad que queda almacenada durante un mes (el doble si son dos meses, etc). Con este efecto, lo que consigue es tener una rotación alta de stocks, evitando unos costes financieros demasiado altos por falta de tesorería, y que algún equipo se pueda “perder” de la mano de alguno de sus empleados (que, habría que añadir, también tienen una elevada rotación).

Respecto a la situación actual, Mohamed tiene en existencias un stock de 20 equipos y desearía acabar el cuatrimestre con el mismo nivel.

Planteen el modelo lineal que resolvería este problema.

Solución del problema Bazar El Lince:



Definimos Variables:

Xsd,i: nº de equipos que compraremos el mes “i” sin descuento.

Xcd,i: nº de equipos que compraremos el mes “i” con descuento.

Si,i+1: estoc de equipos que tenemos del mes “i” al mes “i+1”.

Estas tres variables son enteras, en total son 11 variables enteras ($Xsd1, Xsd2, Xsd3, Xsd4, Xcd1, Xcd2, Xcd3, Xcd4, S12, S23, S34$). No hemos cogido una única variable para cada mes que nos relacione el nº total de equipos comprados porque necesitaremos diferenciar entre los equipos que tienen o no tienen descuento.

Los stocks de inicial y final, como son conocidos no son variables. Si $i+1$ nos indicará el nº de equipos que almacenamos para el siguiente mes; esto nos supone un gasto adicional, por lo que, cuanto menos sea, mejor.

Bi: variable binaria (esto quiere decir que puede ser 0 o 1). Cuando sea 0 significará que el nº de equipos comprados será inferior o igual a 35 (nº a partir del cual nos hacen el descuento). Si es 1 querrá decir que el nº de equipos comprados será mayor que 35. Esta variable nos ayudará a concretar el valor de Xsd,i según superemos o no los 35 equipos comprados. También nos permitirá concretar de forma coherente la función de mínimo coste.

Función Objetivo:

$$[\text{MIN}]Z = 140 \cdot (X_{sd1} + X_{sd2} + X_{sd3} + X_{sd4}) + 112 \cdot (X_{cd1} + X_{cd2} + X_{cd3} + X_{cd4}) + 140 \cdot 35 \cdot (B_1 + B_2 + B_3 + B_4) + 10 \cdot (S_{12} + S_{23} + S_{34})$$

Los $X_{sd,i}$ (equipos sin descuento) valen 140 cada uno.

Los $X_{cd,i}$ (equipos con descuento) valen 112 cada uno.

Si en un mes “i” hay menos de 35 equipos comprados $\Rightarrow B_i=0$; entonces $X_{cd,i}$ deberá ser 0 y también se cumplirá que $140 \cdot 35 \cdot B_i=0$.

Si en un mes “i” se compran más de 35 equipos $\Rightarrow B_i=1$; el valor de $140 \cdot 35 \cdot B_i$ ya nos indicará el coste de los equipos sin descuento de ese mes, por lo que $X_{sd,i}$ deberá ser 0 para que la función objetivo sea coherente. A la vez que $X_{cd} > 0$, ya que tenemos más de 35 equipos comprados. Todas estas condiciones, y alguna otra, las hemos de indicar en las restricciones para que se cumpla la función objetivo de mínimo coste.

Restricciones:

$$X_{sd1} \leq 35 \cdot (1-B_1)$$

$$X_{sd2} \leq 35 \cdot (1-B_2)$$

$$X_{sd3} \leq 35 \cdot (1-B_3)$$

$$X_{sd4} \leq 35 \cdot (1-B_4)$$

Si $B_i=0$, quiere decir que tenemos un nº de equipos comprados inferior o igual a 35 $\Rightarrow X_{sd,i} \leq 35$.

Si $B_i=1$, quiere decir que tenemos más de 35 equipos comprados.

Tenemos 35 equipos sin descuento que ya hemos tenido en cuenta en la función objetivo mediante variables binarias y constantes. Para no contarlos nuevamente, $X_{sd} = 0 \Rightarrow X_{sd,i} \leq 35 \cdot (1-1) = 0$.

$$X_{cd1} \leq (30+45+20+50+20-35-20) \cdot B_1$$

$$X_{cd2} \leq (45+20+50+20-35) \cdot B_2$$

$$X_{cd3} \leq (20+50+20-35) \cdot B_3$$

$$X_{cd4} \leq (50+20-35) \cdot B_4$$

Siempre que $X_{cd,i} \geq 0$ será porque ya hemos comprado 35 equipos sin descuento $\Rightarrow B_i=1$. La suma de constantes que encontramos, por ejemplo en el 1er caso, se trata del nº de equipos máximos que compraría con descuento.

Si $B_i = 0 \Rightarrow X_{cd,i} \leq 0$

$$20+X_{sd1}+35 \cdot B_1+X_{cd1} = 30+S_{12}$$

$$S_{12}+X_{sd2}+35 \cdot B_2+X_{cd2} = 45+S_{23}$$

$$S_{23}+X_{sd3}+35 \cdot B_3+X_{cd3} = 20+S_{34}$$

$$S_{34}+X_{sd4}+35 \cdot B_4+X_{cd4} = 50+20$$

Estas restricciones se llaman de equilibrio de material porque deben cumplir que los equipos que adquiere el propietario en un mes (stock inicial + lo que compra), sean iguales a los que ha vendido más los que ha almacenado para el siguiente mes. Así pues, hay una restricción de este tipo por cada mes.

Como estamos minimizando, tendremos que poner un límite inferior a las variables enteras, eso lo haremos con la siguiente restricción:

$$X_{sd1}, X_{sd2}, X_{sd3}, X_{sd4}, X_{cd1}, X_{cd2}, X_{cd3}, X_{cd4}, S_{12}, S_{23}, S_{34} \geq 0$$